ÉCOLE NATIONALE DU GÉNIE DE L'EAU ET DE L'ENVIRONNEMENT DE STRASBOURG

DURÉE : 2 heures 30.

PARTIE I

On désigne par $E = C(\mathbb{R}+, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des applications continues de $[0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$. Soit $\alpha > 0$. A tout f dans E, on associe l'application $g = \Phi_\alpha(f)$ de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}$, définie par: $g(0) = \frac{f(0)}{\alpha}$, et pour tout $x > 0$: $g(x) = \frac{1}{x^\alpha} \int_0^x t^{\alpha-1} f(t)dt$.

1°) **a)** Vérifier que l'application g ainsi définie est un élément de E.

b) Montrer que pour tout x dans $\mathbb{R}_+$, on a: $g(x) = \int_0^1 u^{\alpha-1} f(xu)du$.

c) En supposant f de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$, montrer que g est aussi de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$, et calculer g' en fonction de $\Phi_{\alpha+1}(f')$.

Si f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+$, montrer que g est aussi de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+$.

2°) **a)** Montrer que Φ_α un endomorphisme de E, injectif.

b) Soit f dans E et $g = \Phi_\alpha(f)$. Montrer que g est dérivable en tout point x de $\mathbb{R}_+^*$, et préciser $g'(x)$ en fonction de $f(x)$ et de $g(x)$.

c) Déterminer les valeurs propres de Φ_α, en précisant les différents sous-espaces propres associés (on pourra former une équation différentielle vérifiée par f telle que $\Phi_\alpha(f) = \lambda f$).

d) Montrer que Φ_α n'est pas surjective.

3°) Soit f dans E et $g = \Phi_\alpha(f)$. On suppose qu'il existe $R > 0$, et une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que pour tout $x \in [0, R[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Montrer qu'il existe une suite réelle $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (que l'on explicitera) telle que pour tout $x \in [0, R[$, on puisse écrire: $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$.

4°) Dans cette question seulement, on suppose que $f(t) = \frac{1}{1+t}$ pour $t \geq 0$, et l'on note $g = \Phi_\alpha(f)$.

a) En prenant $R = 1$, expliciter les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ correspondantes à la situation de 3°).

b) Montrer que g est solution sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle: $xy' + \alpha y = \frac{1}{1+x}$, g étant la seule solution à avoir une limite finie en 0.

c) Montrer que g est décroissante sur $[0, +\infty[$, et préciser sa limite en $+\infty$ (on pourra distinguer les cas: $0 < \alpha < 1, \alpha = 1, \alpha > 1$, en cherchant à majorer simplement $g(x)$ pour $x > 0$).

d) Déterminer une relation entre $\Phi_\alpha(f)$ et $\Phi_{\alpha+1}(f)$. En déduire $\lim_{x\to+\infty} x\Phi_{\alpha+1}(f)(x)$.

5°) Dans cette question seulement, on suppose $\alpha \in \mathbb{N}^*$ et $f(t) = e^{-t}$ pour $t \geq 0$, et l'on note $g = \Phi_\alpha(f)$. Exprimer $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha g(x)$ en utilisant une factorielle, et en déduire un équivalent simple de $g(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

6°) Soient $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

a) Soit f dans E. Grâce à une intégration par parties que l'on précisera, montrer que:

$$(\alpha - \beta)\Phi_\alpha(\Phi_\beta(f)) = \Phi_\beta(f) - \Phi_\alpha(f).$$

b) En déduire que les deux endomorphismes de E, Φ_α et Φ_β commutent (c'est-à-dire $\Phi_\alpha o \Phi_\beta = \Phi_\beta o \Phi_\alpha$).

7°) Soit $n \in \mathbb{N}$, et l'on note $\mathcal{P}_n$ le sous-espace vectoriel de E constitué par les applications polynomiales de $[0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à n.

a) Montrer que si f est dans $\mathcal{P}_n$, alors $g = \Phi_\alpha(f)$ est aussi dans $\mathcal{P}_n$.

b) Montrer que Φ_α induit un endomorphisme de $\mathcal{P}_n$ et que celui-ci est diagonalisable.

c) On suppose ici $n = 2$. Déterminer le nombre d'endomorphismes θ de $\mathcal{P}_2$ tels que pour tout f dans $\mathcal{P}_2$, on ait: $\theta(\theta(f)) = \Phi_\alpha(f)$.

8°) Soit f dans E et $g = \Phi_\alpha(f)$. On suppose que f tend vers le réel L en $+\infty$. Montrer que g admet une limite en $+\infty$ que l'on calculera en fonction de L.

PARTIE II

Dans cette partie on suppose $\alpha = 1$, et l'on notera simplement $\Phi = \Phi_1$ (qui à tout $f \in E$ associe $g = \Phi(f)$ définie par $g(0) = f(0)$ et $g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$ si $x > 0$).

9°) Soit f dans E et $g = \Phi(f)$. Montrer que si f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, alors g admet une limite en $+\infty$ (que l'on précisera). La réciproque est-elle vraie ?

10°) **a)** Soit $f \in E$ et $g = F(f)$. Soit $T > 0$. On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a: $f(x + T) = f(x)$. Déterminer $\lim_{x \to +\infty} g(x)$ en fonction de $\int_0^T f(t)dt$ (on pourra commencer par calculer $g(nT)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$).

b) Déterminer, en fonction de x, un équivalent simple de $\int_0^x |\sin(t)|\,dt$ lorsque x tend vers $+\infty$.

11°) On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des applications f continues de $[0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$, telles que f^2 soit intégrable sur $[0, +\infty[$.

a) Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et que l'application:

$$\mathcal{N} : f \mapsto \sqrt{\int_0^{+\infty} (f(x))^2\,dx}$$

est une norme sur $\mathcal{E}$.

b) Soit $f \in \mathcal{E}$, et $g = \Phi(f)$. Grâce à une intégration par parties, justifier que pour tous ε, A tels que $0 < \varepsilon < A$, on a: $\int_\varepsilon^A (g(x))^2\,dx \leq \frac{1}{\varepsilon}\left(\int_0^\varepsilon f(t)\,dt\right)^2 + 2\left|\int_\varepsilon^A g(t)f(t)\,dt\right|$.

c) En déduire que pour tout $f \in \mathcal{E}$, $\Phi(f)$ est aussi dans $\mathcal{E}$ avec: $\mathcal{N}(\Phi(f)) \leq 2\mathcal{N}(f)$. Comment interprétez-vous ce résultat ?